ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI VÒNG 1 - LỚP 9 QUẬN 12, TP.HCM (2016-2017)

(NGÀY THI: Thứ ba 09- 08 -2016)

Bài 1: (4 điểm)

a) Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3+b^3+c^3-3abc$

b) Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$, với $a,b,c\neq 0$. Tính giá trị biểu thức: $P=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

Bài 2: (4 điểm)

a) Chứng minh rằng: $2a^4-2a^3-a^2+1\geq 0,\ \forall a$.

b) Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

Bài 3: (4 điểm) Tìm x, biết:

a) $\frac{x-2016-2017}{2015}+\frac{x-2015-2017}{2016}+\frac{x-2015-2016}{2017}=3$

b) $4^x-12.2^x+32=0$

Bài 4: (4 điểm) Cho hình vuông ABCD, trên tia đối của tia BA lấy điểm E, trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho AE =CF.

a) Chứng minh rằng: ΔDEF vuông cân tại D.

b) Gọi O là trung điểm của 2 đường chéo AC và BD. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh: O, I, C thẳng hàng.

Bài 5: (4 điểm) Cho tam giác ABC nhọn có 3 đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H.

a) Tính $\frac{HA'}{AA'}+\frac{HB'}{BB'}+\frac{HC'}{CC'}$.

b) Gọi AI là đường phân giác trong của ΔABC; IM, IN lần lượt là phân giác của AIC, AIB. Chứng minh rằng: AN.BI.CM = BN.CI.AM

HƯỚNG DẪN GIẢI
ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI VÒNG 1 LỚP 9
Quận 12 (2016-2017)

Bài 1: **(4 điểm)**

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $a^3+b^3+c^3-3abc$.

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$ $=(a+b+c)^3-3(a+b)c(a+b+c)-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

b) Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$, với $a,b,c\neq 0$. Tính giá trị biểu thức $P=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

Ta có: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ **(chứng minh câu a)**

Mà $a^3+b^3+c^3=3abc$ (gt)

Nên $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+b+c=0\\a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+b+c=0\\(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+b+c=0\\a=b=c=0\ (\text{loại})\end{array}\right.$$

Với a + b+ c=0. Khi đó, biểu thức P, trở thành:

$$P=\left(\frac{a+b}{b}\right)\left(\frac{b+c}{c}\right)\left(\frac{c+a}{a}\right)\Leftrightarrow P=\left(\frac{-c}{b}\right)\left(\frac{-a}{c}\right)\left(\frac{-b}{a}\right)\Leftrightarrow P=-1.$$

Bài 2: **(4 điểm)**

a) Chứng minh rằng: $2a^4-2a^3-a^2+1\geq 0,\ \forall a$.

Ta có: $2a^4-2a^3-a^2+1\geq 0,\ \forall a$

$\Leftrightarrow 2a^3(a-1)-(a-1)(a+1)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)(2a^3-a-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)(2a^3-2a^2+2a^2-2a+a-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)[2a^2(a-1)+2a(a-1)+(a-1)]\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2(2a^2+2a+1)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2\left[2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\geq 0$ (bất đẳng thức đúng $\forall a$)

Vậy $2a^4-2a^3-a^2+1\geq 0,\ \forall a$

b) Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:
$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3$.

Cách 1: Do a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên ta có:

$$\begin{cases} b+c>a \\ c+a>b \\ a+b>c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c-a>0 \\ c+a-b>0 \\ a+b-c>0 \end{cases}$$

Đặt $x=b+c-a; y=c+a-b; z=a+b-c$; $x,y,z>0 \Rightarrow a=\frac{y+z}{2}; b=\frac{z+x}{2}; c=\frac{x+y}{2}$

Do đó, bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}\ge 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\ge 6$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2 \\ \frac{y}{z}+\frac{z}{y}\ge 2 \\ \frac{z}{x}+\frac{x}{z}\ge 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\ge 6$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Do a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên ta có:

$$\begin{cases} b+c>a \\ c+a>b \\ a+b>c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c-a>0 \\ c+a-b>0 \\ a+b-c>0 \end{cases}$$

Ta có: $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{b+c-a}+\frac{2b}{c+a-b}+\frac{2c}{a+b-c}\ge 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{b+c-a}+1+\frac{2b}{c+a-b}+1+\frac{2c}{a+b-c}+1\ge 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{b+c-a}+\frac{a+b+c}{c+a-b}+\frac{a+b+c}{a+b-c}\ge 9$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)\ge 9$$

Đặt $x=b+c-a; y=c+a-b; z=a+b-c$, $x,y,z>0$

Bất đẳng thức trở thành:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1\ge 9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\ge 6$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\ge 2\\ \dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\ge 2\Rightarrow \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)+\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\right)\ge 6\\ \dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\ge 2\end{cases}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

<u>Bài 3:</u> (4 điểm) Tìm x, biết:

a) $$\frac{x-2016-2017}{2015}+\frac{x-2015-2017}{2016}+\frac{x-2015-2016}{2017}=3$$

$$\frac{x-2016-2017}{2015}-1+\frac{x-2015-2017}{2016}-1+\frac{x-2015-2016}{2017}-1=0$$

$$\frac{x-2016-2017-2015}{2015}+\frac{x-2015-2017-2016}{2016}+\frac{x-2015-2016-2017}{2017}=0$$

$$(x-2016-2017-2015)\left(\frac{1}{2015}+\frac{1}{2016}+\frac{1}{2017}\right)=0$$

$$x-2016-2017-2015=0$$

$$x=6048$$

Vậy x = 6048

b) $4^x-12.2^x+32=0$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2-12.2^x+32=0$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2-4.2^x-8.2^x+32=0$$

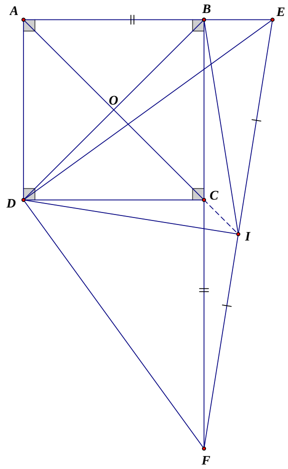
$$\Leftrightarrow 2^x(2^x-4)-8(2^x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow (2^x-4)(2^x-8)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x-4=0\\2^x-8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=4\\2^x=8\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$$

Vậy x =2 hay x =3

Bài 4: **(4 điểm)** Cho hình vuông ABCD, trên tia đối của tia BA lấy điểm E, trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho AE =CF.



a) Chứng minh rằng: $\Delta\mathbf{DEF}$ vuông cân tại D

Ta dễ chứng minh được: $\Delta\mathbf{ADE}=\Delta\mathbf{CDF}(\mathbf{c-g-c})\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{ADE}=\mathbf{CDF}\\ \mathbf{DE}=\mathbf{DF}\end{cases}$

Ta có: $\begin{cases}\mathbf{ADE}+\mathbf{EDC}=\mathbf{90^0}\\ \mathbf{ADE}=\mathbf{CDF}(\mathbf{cmt})\end{cases}\Rightarrow\mathbf{CDF}+\mathbf{EDC}=\mathbf{90^0}\Rightarrow\mathbf{EDF}=\mathbf{90^0}$

Xét $\Delta\mathbf{DEF}$, ta có: DE = DF (cmt)

$\Rightarrow\Delta\mathbf{DEF}$ cân tại D mà $\mathbf{EDF}=\mathbf{90^0}$ (cmt) nên $\Delta\mathbf{DEF}$ vuông cân tại D

b) Gọi O là trung điểm của 2 đường chéo AC và BD. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh: O, I, C thẳng hàng.

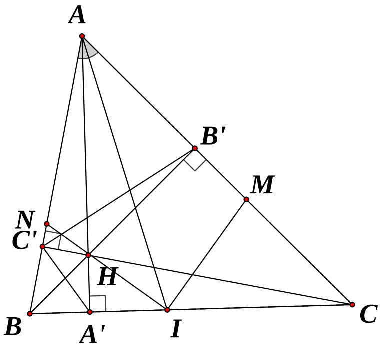
Xét $\Delta\mathbf{DEF}$ vuông tại D, ta có: DI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền EF(...)$\Rightarrow\mathbf{DI}=\frac{1}{2}\mathbf{EF}$

Xét $\Delta\mathbf{BEF}$ vuông tại B, ta có: BI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền EF(...)$\Rightarrow\mathbf{BI}=\frac{1}{2}\mathbf{EF}$

Ta có: $\begin{cases}\mathbf{OD}=\mathbf{OB}(\mathbf{O\ là\ trung\ điểm\ của\ BD})\\ \mathbf{ID}=\mathbf{IB}\left(=\frac{1}{2}\mathbf{EF}\right)\\ \mathbf{CD}=\mathbf{CB}(\mathbf{ABCD\ là\ hình\ vuông})\end{cases}$

$\Rightarrow\mathbf{O,I,C}$ cùng thuộc đường trung trực của đoạn DB $\Rightarrow\mathbf{O,I,C}$ thẳng hàng.

Bài 5: **(4 điểm)** Cho tam giác ABC nhọn có 3 đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H.



a) Tính $\frac{HA'}{AA'}+\frac{HB'}{BB'}+\frac{HC'}{CC'}$.

Ta có: $S_{AHB}+S_{BHC}+S_{AHC}=S_{ABC}\Rightarrow \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}}+\frac{S_{BHC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AHC}}{S_{ABC}}=1$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}.HC'.AB}{\frac{1}{2}.CC'.AB}+\frac{\frac{1}{2}.HA'.BC}{\frac{1}{2}.AA'.BC}+\frac{\frac{1}{2}.HB'.AC}{\frac{1}{2}.BB'.AC}=1 \Rightarrow \frac{HA'}{AA'}+\frac{HB'}{BB'}+\frac{HC'}{CC'}=1$$

b) Gọi AI là đường phân giác trong của ΔABC; IM, IN lần lượt là phân giác của AIC, AIB. Chứng minh rằng: AN.BI.CM = BN.CI.AM

Ta có: $\begin{cases} \text{IN là phân giác trong của } \Delta AIB \\ \text{IM là phân giác trong của } \Delta AIC \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{NA}{NB}=\frac{IA}{IB} \\ \frac{MC}{MA}=\frac{IC}{IA} \end{cases} \Rightarrow \frac{NA}{NB}\cdot\frac{MC}{MA}=\frac{IC}{IB}\Rightarrow AN.BI.CM=BN.CI.AM \quad \text{(đpcm)}$$