ĐỀ THI
HỌC SINH GIỎI TRƯỜNG TRẦN ĐẠI NGHĨA
LỚP 9 – LẦN 1 (2016-2017)

Bài 1: (2 điểm) Cho các số a, b, c đôi một khác nhau và thỏa mãn: $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2$.

Thu gọn biểu thức: $\mathbf{A}=\dfrac{\mathbf{a}^3}{\mathbf{a}^2+2\mathbf{bc}}+\dfrac{\mathbf{b}^3}{\mathbf{b}^2+2\mathbf{ca}}+\dfrac{\mathbf{c}^3}{\mathbf{c}^2+2\mathbf{ab}}$

Bài 2: (2 điểm) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình: $\mathbf{xy}^2+2\mathbf{xy}+\mathbf{x}-243\mathbf{y}=0$

Bài 3: (4 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $(\mathbf{x}+\mathbf{2})(\mathbf{x}-\mathbf{3})+(\mathbf{x}+\mathbf{2})\sqrt{\dfrac{\mathbf{x}-\mathbf{3}}{\mathbf{x}+\mathbf{2}}}-\mathbf{2}=\mathbf{0}$

b) $\begin{cases}\mathbf{x}^2\mathbf{y}^2+\mathbf{x}+\mathbf{y}-7\mathbf{y}^2=\mathbf{0}\\ \mathbf{x}^4\mathbf{y}^4+\mathbf{x}^2\left(2\mathbf{y}^4+1\right)+2\mathbf{xy}+\mathbf{y}^2=33\mathbf{y}^4\end{cases}$

Bài 4: (4 điểm)

a) Cho a, b là các số dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}+\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\ge 2+\dfrac{2015(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2}{\mathbf{a}^2+4028\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2}+\dfrac{2016(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2}{\mathbf{a}^2+4030\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2}$

b) Tìm giá trị lớn nhất của: $\mathbf{A}=\mathbf{b}^3-8\mathbf{ab}^2+21\mathbf{a}^2\mathbf{b}-18\mathbf{a}^3-7\mathbf{c}^2+14\mathbf{c}$ với a, b là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{2\mathbf{a}}+\mathbf{b}\le 2$

Bài 5: (4 điểm) Từ điểm A ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến (O) và cát tuyến ADE của (O) (AD < AE; B và C là các tiếp điểm). Đường thẳng OA cắt (O) tại M,N (AM < AN). Gọi H là giao điểm của BC và OA.

a) Chứng minh rằng: 4 điểm E, D, O, H cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng: ba đường thẳng DN, EM và BC đồng qui.

Bài 6: (4 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với AB, AC, BC lần lượt tại P, Q, R. Gọi H là giao điểm của PQ và IR, M là giao điểm của AH và BC. Chứng minh rằng: $(\mathbf{AB}+\mathbf{AC}).\mathbf{AH}=2.\mathbf{AM}.\mathbf{AQ}$.

★ **HẾT** ★

HƯỚNG DẪN ĐỀ THI
HỌC SINH GIỎI TRƯỜNG TRẦN ĐẠI NGHĨA
LỚP 9 – LẦN 1 (2016-2017)

Bài 1: (2 điểm) Cho các số a, b, c đôi một khác nhau và thỏa mãn: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$.

Thu gọn biểu thức: $A=\frac{a^3}{a^2+2bc}+\frac{b^3}{b^2+2ca}+\frac{c^3}{c^2+2ab}$

Từ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=a^2+b^2+c^2$

$\Rightarrow ab+bc+ca=0 \Rightarrow a^2+2bc=a^2+2bc-(ab+bc+ca)=a^2-ab+bc-ca$

$=a(a-b)-c(a-b)=(a-b)(a-c)$

Tương tự: $b^2+2ca=(b-c)(b-a);c^2+2ab=(c-a)(c-b)$

Do đó: $A=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

$$=\frac{a^3(b-c)-b^3(a-c)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{a^3(b-c)-b^3(a-b+b-c)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{a^3(b-c)-b^3(a-b)-b^3(b-c)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(b-c)(a^3-b^3)-(a-b)(b^3-c^3)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2-b^2-bc-c^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(b-c)(a-b)(a^2+ab-bc-c^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(b-c)(a-b)[(a+c)(a-c)+b(a-c)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=a+b+c$$

Bài 2: (2 điểm) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình: $xy^2+2xy+x-243y=0$

$xy^2+2xy+x-243y=0 \Leftrightarrow x(y+1)^2=243y\,(*)$

Ta có: $(243y)\vdots(y+1)^2$. Vì ƯCLN$\left(y;(y+1)^2\right)=1$. Nên $243\vdots(y+1)^2$.

Mà $(y+1)^2$ là số chính phương, $(y+1)^2\ge 4;(y\in N^*)$

$243=3^5$. Do đó: $(y+1)^2=3^2$ hoặc $(y+1)^2=3^4$

$\Leftrightarrow y+1=3$ hoặc $y+1=3^2$ $\Leftrightarrow y=2$ hoặc $y=8$

Nếu $y=2$ thì từ (*) ta có: $x.3^2=243.2 \Leftrightarrow x=54$

Nếu $y=8$ thì từ (*) ta có: $x.3^4=243.8 \Leftrightarrow x=24$

Vậy nghiệm nguyên dương (x;y) của phương trình là $(54;2);(24;8)$

Bài 3: (4 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $\left(x+2\right)\left(x-3\right)+\left(x+2\right)\sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}-2=0$

Điều kiện: $x<-2$ hoặc $x\geq 3$.

Đặt $y=\left(x+2\right)\sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}$

Phương trình trở thành: $y^2+y-2=0$.

Ta có: $y=1; y=-2$ vì $a+b+c=0$

Với $y=1$, ta có: $\left(x+2\right)\sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2>0 \\ \left(x+2\right)\left(x-3\right)=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x^2-x-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{22}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$$

Với $y=-2$; Ta có:

$$\left(x+2\right)\sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}=-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2<0 \\ \left(x+2\right)\left(x-3\right)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}\right\}$

b) $\begin{cases} x^2y^2+x+y-7y^2=0\left(1\right) \\ x^4y^4+x^2\left(2y^4+1\right)+2xy+y^2=33y^4\left(2\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7y^2-x^2y^2 \\ x^4y^4+2x^2y^4+\left(x+y\right)^2=33y^4 \end{cases}$$

Do đó, ta có: $x^4y^4+2x^2y^4+\left(7y^2-x^2y^2\right)^2=33y^4 \Leftrightarrow x^4y^4+2x^2y^4+49y^4-14x^2y^4+x^4y^4=33y^4$

$\Leftrightarrow 2x^4y^4-12x^2y^4+16y^4=0 \Leftrightarrow 2y^4\left(x^4-6x^2+8\right)=0 \Leftrightarrow 2y^4\left(x^2-2\right)\left(x^2-4\right)=0$

$\Leftrightarrow y=0$ hoặc $x=\sqrt{2}; x=-\sqrt{2}; x=2; x=-2$

$y=0$ kết hợp (1) ta có $x=0$

$x=\sqrt{2}$ kết hợp (1) ta có: $5y^2-y-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{1\pm\sqrt{1+20\sqrt{2}}}{10}$

$x=-\sqrt{2}$ kết hợp (1) ta có: $5y^2-y+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow y\notin\varnothing$

$x=2$ kết hợp (1) ta có: $3y^2-y-2=0 \Leftrightarrow y=1; y=\dfrac{-2}{3}$

$x=-2$ kết hợp (1) ta có: $3y^2-y+2=0 \Leftrightarrow y\in\varnothing$

Vậy nghiệm $\left(x;y\right)$ của hệ phương trình là: $\left(0;0\right);\left(\sqrt{2};\dfrac{1+\sqrt{1+20\sqrt{2}}}{10}\right);\left(\sqrt{2};\dfrac{1-\sqrt{1+20\sqrt{2}}}{10}\right);\left(2;1\right);\left(2;\dfrac{-2}{3}\right)$

Bài 4: (4 điểm)

a) Cho a, b là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2+\frac{2015(a-b)^2}{a^2+4028ab+b^2}+\frac{2016(a-b)^2}{a^2+4030ab+b^2}$

Ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2-\frac{2015(a-b)^2}{a^2+4028ab+b^2}-\frac{2015(a-b)^2}{a^2+4030ab+b^2}=\frac{(a-b)^2}{ab}-\frac{2015(a-b)^2}{4030ab+(a-b)^2}-\frac{2016(a-b)^2}{4032ab+(a-b)^2}$

$\ge\frac{(a-b)^2}{ab}-\frac{2015(a-b)^2}{4030ab}-\frac{2016(a-b)^2}{4032ab}=0$

Do đó: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2+\frac{2015(a-b)^2}{a^2+4028ab+b^2}+\frac{2016(a-b)^2}{a^2+4030ab+b^2}$

b) Cho Tìm giá trị lớn nhất của: $A=b^3-8ab^2+21a^2b-18a^3-7c^2+14c$ **với a, b là các số thực dương thỏa mãn** $\frac{1}{2a}+b\le 2$

Ta có: $\frac{1}{2a}+b\le 2$. Do đó: $4.\frac{1}{2a}.b\le\left(\frac{1}{2a}+b\right)^2\le 2^2\Rightarrow\frac{b}{2a}\le 1\Rightarrow b\le 2a\Rightarrow b-2a\le 0$

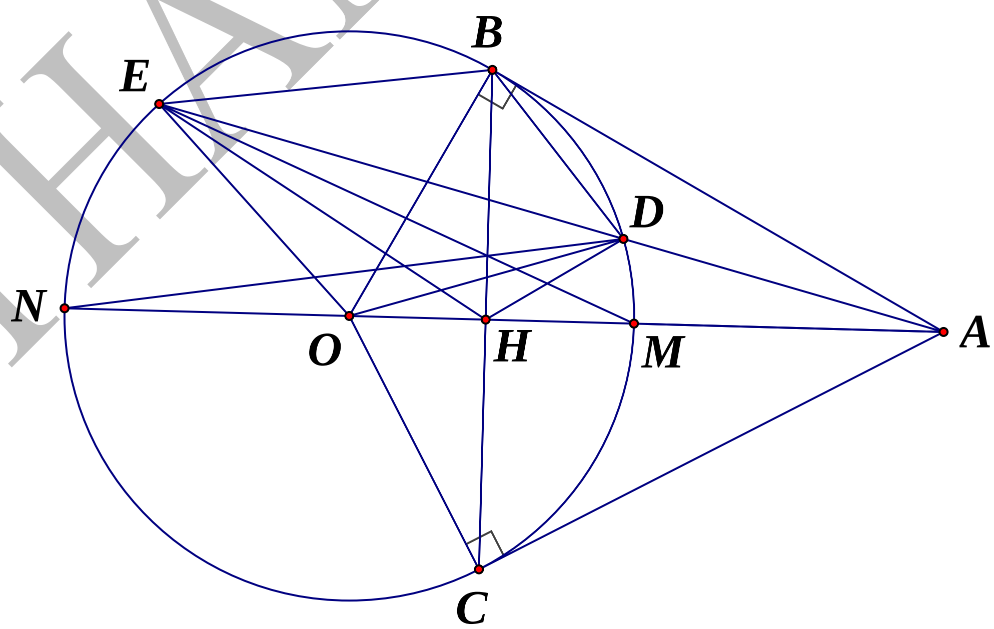
Vì vậy $A=b^3-2ab^2-6ab^2+12a^2b+9a^2b-18a^3-7\left(c^2-2c+1\right)+7$

$=b^2(b-2a)-6ab(b-2a)+9a^2(b-2a)-7(c-1)^2+7=(b-2a)(b-3a)^2-7(c-1)^2+7\le 7$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b-2a=0$ và $c-1=0$ $\Leftrightarrow a=\frac{1}{2};b=1;c=1$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 7 $\Leftrightarrow a=\frac{1}{2};b=1;c=1$

Bài 5: **(4 điểm) Từ điểm A ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến (O) và cát tuyến ADE của (O) (AD < AE; B và C là các tiếp điểm). Đường thẳng OA cắt (O) tại M,N (AM < AN). Gọi H là giao điểm của BC và OA.**



a) Chứng minh rằng: 4 điểm E, D, O, H cùng thuộc một đường tròn.

AB, AC là các tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow$ AB = AC, AO là tia phân giác của $\mathbf{BAC}$.

$\Delta\mathbf{ABC}$ cân tại A có AO là đường phân giác $\Rightarrow$ AO là đường cao của $\Delta\mathbf{ABC}$.

$\Delta\mathbf{ABO}$ vuông tại B, BH là đường cao $\Rightarrow \mathbf{AH.AO} = \mathbf{AB}^2$.

Xét $\Delta\mathbf{ABD}$ và $\Delta\mathbf{AEB}$ ta có: $\mathbf{BAD}$ chung; $\mathbf{ABD} = \mathbf{AEB}\left(=\frac{1}{2}\mathbf{sđBD}\right)$

$\Rightarrow \Delta\mathbf{ABD} \backsim \Delta\mathbf{AEB}(\mathbf{g}-\mathbf{g}) \Rightarrow \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AE}} = \frac{\mathbf{AD}}{\mathbf{AB}} \Rightarrow \mathbf{AD.AE} = \mathbf{AB}^2$

Do đó: $\mathbf{AH.AO} = \mathbf{AD.AE}\left(=\mathbf{AB}^2\right) \Rightarrow \frac{\mathbf{AH}}{\mathbf{AD}} = \frac{\mathbf{AE}}{\mathbf{AO}}$

Xét $\Delta\mathbf{AHD}$ và $\Delta\mathbf{AEO}$ ta có: $\mathbf{HAD}$ chung; $\frac{\mathbf{AH}}{\mathbf{AE}} = \frac{\mathbf{AD}}{\mathbf{AO}}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta\mathbf{AHD} \backsim \Delta\mathbf{AEBO}(\mathbf{c}-\mathbf{g}-\mathbf{c}) \Rightarrow \mathbf{AHD} = \mathbf{AEO} \Rightarrow$ Tứ giác DEOH nội tiếp.

Vậy E, D, O, H cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng: ba đường thẳng DN, EM và BC đồng qui.

Xét đường tròn $(\mathbf{DECH})$ có: $\mathbf{OD} = \mathbf{OE}(=\mathbf{R}) \Rightarrow \mathbf{OD} = \mathbf{OE} \Rightarrow \mathbf{OHE} = \mathbf{AEO}$. Nên $\mathbf{AHD} = \mathbf{OHE}(=\mathbf{AEO})$

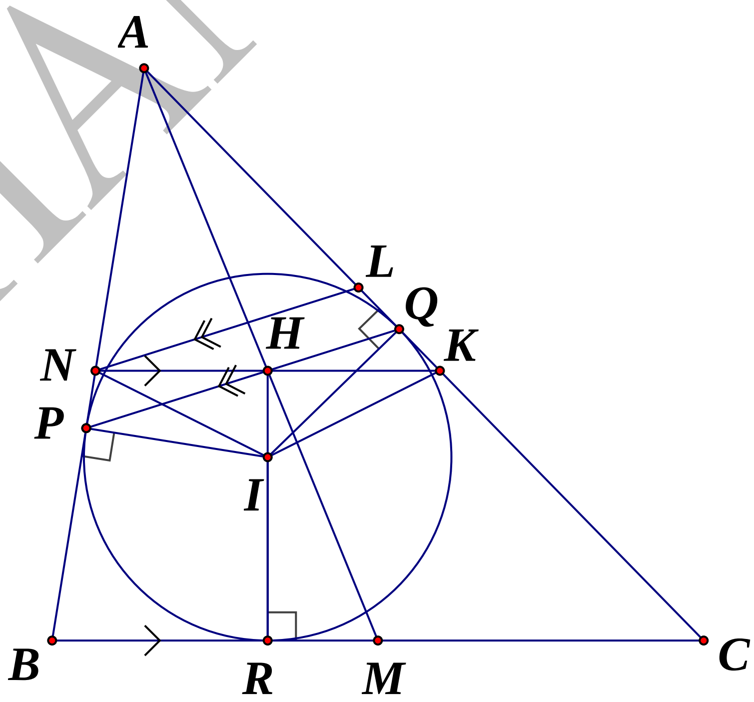
Mà $\mathbf{AHD} + \mathbf{DHB} = \mathbf{OHE} + \mathbf{EHB}\left(=90^0\right) \Rightarrow \mathbf{DHB} = \mathbf{EHB} \Rightarrow$ BC là đường phân giác của $\Delta\mathbf{HDE}$

Mặt khác: $\mathbf{NDE} = \frac{1}{2}\mathbf{EON} = \frac{1}{2}\mathbf{HDE} \Rightarrow \mathbf{NDE} = \mathbf{NDH} \Rightarrow$ DN là đường phân giác của $\Delta\mathbf{HDE}$

Tương tự EM cũng là đường phân giác của $\Delta\mathbf{HDE}$

Do đó: các đường thẳng DN, EM, BC là các đường phân giác của $\Delta\mathbf{HDE}$ nên đồng quy.

<u>Bài 6:</u> (4 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với AB, AC, BC lần lượt tại P, Q, R. Gọi H là giao điểm của PQ và IR, M là giao điểm của AH và BC. Chứng minh rằng: $(\mathbf{AB}+\mathbf{AC}).\mathbf{AH} = 2.\mathbf{AM.AQ}$.



Qua H vẽ đường thẳng song song với BC lần lượt cắt AB, AC tại N và K.
Mà $\mathbf{HR} \perp \mathbf{BC}$. Nên $\mathbf{HR} \perp \mathbf{NK}$
Qua N vẽ đường thẳng song song với PQ cắt AC tại L.
Không mất tính tổng quát, giả sử $\mathbf{AB} \le \mathbf{AC}$.

$\Delta\mathbf{ABM}$ có: NH // BM $\Rightarrow \dfrac{\mathbf{AH}}{\mathbf{AM}} = \dfrac{\mathbf{AN}}{\mathbf{AB}}$ (1)

$\Delta\mathbf{ACM}$ có: KH // CM $\Rightarrow \dfrac{\mathbf{AH}}{\mathbf{AM}} = \dfrac{\mathbf{AK}}{\mathbf{AC}}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{\mathbf{AN}}{\mathbf{AB}} = \dfrac{\mathbf{AK}}{\mathbf{AC}} = \dfrac{\mathbf{AH}}{\mathbf{AM}} \Rightarrow \dfrac{\mathbf{AH}}{\mathbf{AM}} = \dfrac{\mathbf{AN}+\mathbf{AK}}{\mathbf{AB}+\mathbf{AC}} (3)$

Ta có: $\mathbf{IPN} + \mathbf{IHN} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác PNHI là tứ giác nội tiếp. $\Rightarrow \mathbf{INH} = \mathbf{IPH}$ (*)

Tương tự: $\mathbf{IKH} = \mathbf{IQH}$.(**)

Ta có: $\mathbf{IP} = \mathbf{IQ}(= \mathbf{r})$ $\Rightarrow \Delta\mathbf{IPQ}$ cân tại I. $\Rightarrow \mathbf{IPH} = \mathbf{IQH}$ (***)

Từ (*),(**), (***) $\Rightarrow \mathbf{INH} = \mathbf{IKH} \Rightarrow \Delta\mathbf{INK}$ cân tại I. $\Rightarrow \mathbf{NH} = \mathbf{HK}$
$\Delta\mathbf{NLK}$ có: $\mathbf{NH} = \mathbf{HK};$ NL // HQ $\Rightarrow$ $\mathbf{LQ} = \mathbf{QK}$

Ta có: NL // PQ $\Rightarrow$ Tứ giác PNLQ là hình thang. Mà $\mathbf{NPQ} = \mathbf{LQP}$($\Delta\mathbf{APQ}$ cân tại A, AP = AQ).
Do đó: tứ giác PNLQ là hình thang cân. $\Rightarrow \mathbf{NP} = \mathbf{LQ}.$ Vì vậy $\mathbf{NP} = \mathbf{LQ} = \mathbf{QK}$
Nên $\mathbf{AN} + \mathbf{AK} = \mathbf{AP} - \mathbf{NP} + \mathbf{AQ} + \mathbf{QK} = \mathbf{AP} + \mathbf{AQ} = 2\mathbf{AQ}(4)$

Từ (3) và (4) ta có: $\dfrac{\mathbf{AH}}{\mathbf{AM}} = \dfrac{2\mathbf{AQ}}{\mathbf{AB}+\mathbf{AC}}$. Vậy $(\mathbf{AB}+\mathbf{AC}).\mathbf{AH} = 2.\mathbf{AM}.\mathbf{AQ}$

★ HẾT ★