SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

<u>ĐỀ CHÍNH THỨC</u>

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
LỚP 9 – THCS (NĂM 2017 – 2018)
MÔN TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
Ngày thi: 20/3/2017

<u>Bài 1:</u> (3 điểm)

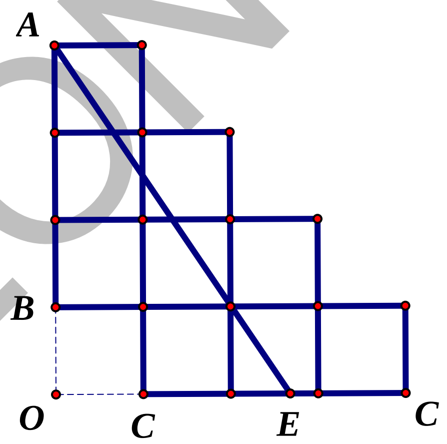
Cho hai số a, b thỏa các điều kiện: $a^2+b^2=1,\ a^4+b^4=\frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức: $P=a^{2018}+b^{2018}$

<u>Bài 2:</u> (3 điểm)

Giải phương trình: $\sqrt{5-x}+2\sqrt{3+x}=6$

<u>Bài 3:</u> (2 điểm)

Hình bên gồm 9 hình vuông giống hệt nhau, mỗi hình vuông có diện tích 4 cm^2. Các điểm A, B, C, D là đỉnh của các hình vuông. Điểm E nằm trên đoạn CD sao cho AE chia 9 hình vuông thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính độ dài đoạn CE.

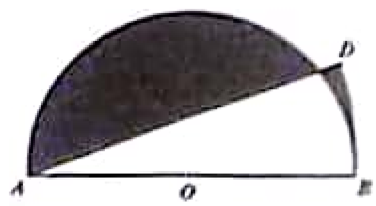


<u>Bài 4:</u> (4 điểm)

1) Cho 2 số thực x, y. Chứng minh rằng: $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\ge 2x\left(1-y^2\right)$.
2) Các số A; B; C; D; $A+C$; $B+C$; $A+D$; $B+D$ là **8** số tự nhiên khác nhau từ **1** đến **8.** Biết A là số lớn nhất trong các số A; B; C; D. Tìm A.

<u>Bài 5:</u> (5 điểm)

1) Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 4cm. Góc $DAB=30^0$ và cung BD là một phần của đường tròn tâm A. Tính diện tích phần tô đậm.



2) Cho tứ giác nội tiếp ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau tại I. Đường thẳng qua I vuông góc với AD cắt cạnh BC tại N. Đường thẳng qua I vuông góc với BC cắt cạnh AD tại M. Chứng minh rằng: nếu AB + CD = 2MN thì ABCD là hình thang.

<u>Bài 6:</u> (3 điểm)

Một ôtô dự định đi từ thành phố A đến thành phố B với vận tốc không đổi là v km/h. Nếu vận tốc ôtô tăng thêm 20% thì nó sẽ đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Tuy nhiên sau khi đi được 120 km với vận tốc v, ôtô đã tăng tốc thêm 25% và đến sớm hơn dự định 48 phút. Tính quãng đường giữa hai thành phố.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
LỚP 9 – THCS (NĂM 2017 – 2018)
MÔN TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
Ngày thi: 29/3/2018

Bài 1: (3 điểm)

Cho hai số a, b thỏa các điều kiện: $a^2+b^2=1,\ a^4+b^4=\frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức: $P=a^{2018}+b^{2018}$

Ta có: $2\left(a^4+b^4\right)=\left(a^2+b^2\right)^2+\left(a^2-b^2\right)^2 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)=(1)^2-\left(a^2-b^2\right)^2$

$\Rightarrow a^2=b^2$ mà $a^2+b^2=1$ nên $a^2=b^2=\frac{1}{2}$.

Ta có: $P=a^{2018}+b^{2018}=\left(a^2\right)^{1009}+\left(b^2\right)^{1009}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1009}+\left(\frac{1}{2}\right)^{1009}=\frac{1}{2^{1008}}$

Bài 2: (3 điểm)

Giải phương trình: $\sqrt{5-x}+2\sqrt{3+x}=6$

Điều kiện: $-3\le x\le 5$

Phương trình trở thành: $\left(\sqrt{5-x}+2\sqrt{3+x}\right)^2=6^2$

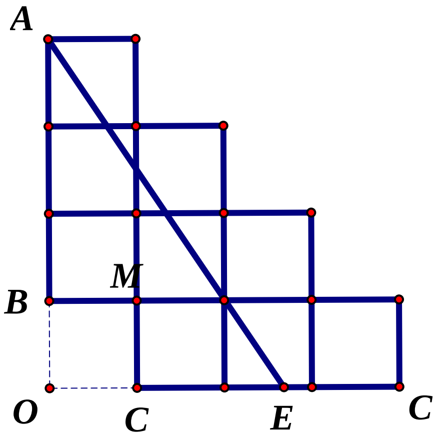
$\Leftrightarrow 5-x+4(3+x)+4\sqrt{(5-x)(3+x)}=36$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{(5-x)(3+x)}=19-3x \Leftrightarrow \begin{cases}19-3x\ge 0\\ 16(5-x)(3+x)=361-114x+9x^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le \frac{19}{3}\\ 25x^2-146x+121=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le\frac{19}{3}\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{121}{25}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{121}{25}\end{array}\right.$

So với điều kiện ta nhận $\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{121}{25}\end{array}\right.$. Vậy $S=\left\{1;\frac{121}{25}\right\}$

Bài 3: (2 điểm) Hình bên gồm 9 hình vuông giống hệt nhau, mỗi hình vuông có diện tích 4 cm^2. Các điểm A, B, C, D là đỉnh của các hình vuông. Điểm E nằm trên đoạn CD sao cho AE chia 9 hình vuông thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính độ dài đoạn CE.



Vì mỗi hình vuông có diện tích 4 cm^2
nên mỗi hình vuông nhỏ có cạnh là 2cm.

$$S_{AOE} = S_{OBMC} + \frac{1}{2}S_{9hinhvuong} = 4 + \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 4 = 22$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}OA.OE = 22 \Rightarrow OE = \frac{22.2}{4} = \frac{11}{2}(cm)$$ (vì OA = 4. 2 = 8 cm)

Vậy CE = OE – OC = $\frac{11}{2} - 2 = \frac{7}{2}(cm)$

Bài 4: (4 điểm)

1) Cho 2 số thực x, y. Chứng minh rằng: $(x^2+1)(y^2+1) \ge 2x(1-y^2)$.

Ta có: $(x^2+1)(y^2+1) \ge 2x(1-y^2)$

$\Leftrightarrow x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 \ge 2x - 2xy^2$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (x^2y^2 + 2xy^2 + y^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (xy+y)^2 \ge 0$ (bất đẳng thức đúng)

Vậy $(x^2+1)(y^2+1) \ge 2x(1-y^2)$

2) Các số A; B; C; D; $A+C$; $B+C$; $A+D$; $B+D$ là **8** số tự nhiên khác nhau từ **1** đến **8.** Biết A là số lớn nhất trong các số A; B; C; D. Tìm A.

Ta có:

$$\begin{cases} A+D \text{ và } A+C \le 8 \\ C \ne D \\ C;D \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \le 6\left(\text{Vì } C_{min}; D_{min} \in \{1;2\}\right) \\ C,D \le 3 \end{cases}$$

Lại có: $A > B, C, D \ge 1 \Rightarrow A \ge 4$

TH1:

$$\left.\begin{matrix} A = 6 \\ A+C; A+D \in \{8\}\left(\text{vì } B+C < A+C \text{ và } B+D < A+D\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow C,D \in \{1;2\}$$

$\Rightarrow A+C; A+D \in \{7;8\}$

Thế thì: $B = 3$ (Vì $B+C; B+D \in \{4;5\}$ thỏa đề.

TH2:

$$\left.\begin{matrix} A = 5 \\ C,D \le 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ 1 trong hai số C và D phải bằng 3 (để tổng có số 8)

Cách 1:

- Nếu B = 4 $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} C,D \in \{2;3\} (\text{loại vì không có số } 1) \\ C,D \in \{1;3\} (\text{loại vì không có số } 5) \end{array}\right.$
- Nếu B = 3 (loại vì có hai số 3)
- Nếu B = 2 $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} C,D \in \{1;3\} (\text{loại vì có hai số } 5) \\ C,D \in \{2;3\} (\text{loại vì có hai số } 2) \end{array}\right.$
- Nếu B = 1 $\Rightarrow C,D \in \{2;3\}$ (loại vì có hai số 3)

Cách2:

Tổng 8 số $= 3(A+B+C+D) = \frac{(1+8).8}{2} = 36$

$\Rightarrow B+C+D=7$ (do A = 5)

Do $\left[\begin{array}{l} C=3 \\ D=3 \end{array}\right.$ nên $\left[\begin{array}{l} B+D=4 \\ B+C=4 \end{array}\right.$ (loại vì 4 chỉ = 3 + 1; sẽ có 2 số 3)

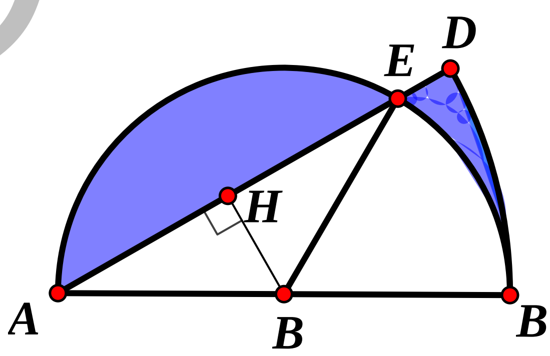
TH3: A = 4; khi đó không có số nào bằng 8. Thật vậy:

$\begin{cases} B+C \text{ và } B+C \text{ không thể} = 5+3=6+2=1+7 \text{ (do A lớn nhất)} \\ A+C \text{ và } A+D \text{ không thể bằng } 8 \end{cases}$

Vậy A = 6

Bài 5: (5 điểm)

1) Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 4cm. Góc $DAB = 30^0$ và cung BD là một phần của đường tròn tâm A. Tính diện tích phần tô đậm.



Xét (A, 4cm) ta có: $S_{quatDAB} = \frac{\Pi 4^2}{360^0} \cdot 30^0 = \frac{4\Pi}{3}(cm^2)$

Xét (O, 2cm) ta có: $S_{nua(O)} = \frac{\Pi 2^2}{2} = 2\Pi(cm^2)$

Gọi E là giao điểm của AD và (O), ta tính được $AOE = 120^0$

$$S_{quatOAE} = \frac{\Pi 2^2}{360^0} \cdot 120^0 = \frac{4\Pi}{3}(cm^2)$$

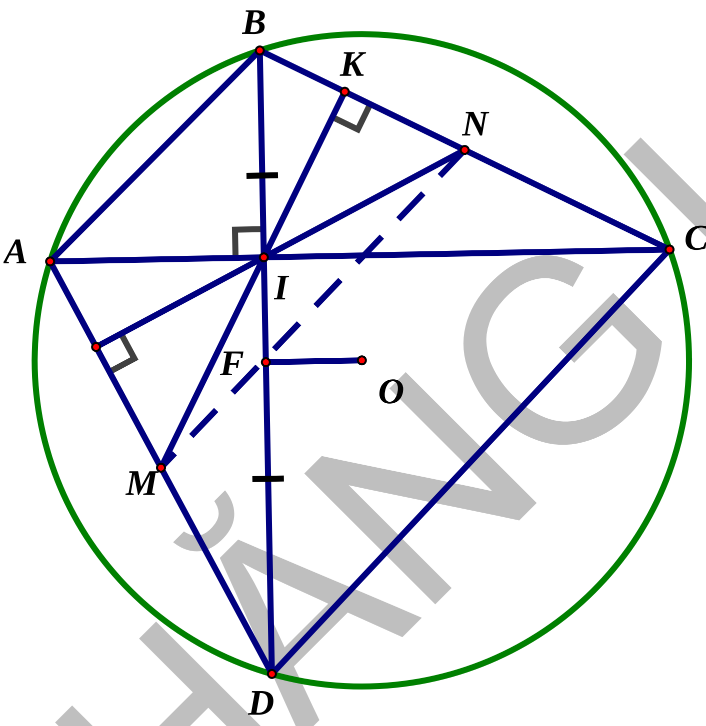
Vẽ $OH \perp AE$ tại H $\Rightarrow \begin{cases} OH = OA.\sin 30^0 = 2 \bullet \frac{1}{2} = 1 \\ AH = OA.\cos 30^0 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow AE = 2\sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow S_{OAE} = \frac{1}{2} OH.AE = \frac{1}{2}.1.2\sqrt{3} = \sqrt{3}\left(cm^2\right)$

$\Rightarrow S_{vpAE} = \frac{4\prod}{3} - \sqrt{3} \Rightarrow S_{AEB} = \frac{2\prod}{3} + \sqrt{3}$

Vậy $S_{todam} = S_{vpAE} + \left(S_{quatDAB} - S_{AEB}\right) = 2\prod - 2\sqrt{3}\left(cm^2\right)$

2) Cho tứ giác nội tiếp ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau tại I. Đường thẳng qua I vuông góc với AD cắt cạnh BC tại N. Đường thẳng qua I vuông góc với BC cắt cạnh AD tại M. Chứng minh rằng: nếu AB + CD = 2MN thì ABCD là hình thang.



Gọi K là giao điểm của MI và BC
Gọi F là trung điểm của BD.

Ta có: $BIK = KIC$ (cùng phụ với IBK) và $MDI = KIC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn AB của (O))

$\Rightarrow BIK = MDI$ mà $BIK = MID$ (2 góc đối đỉnh) nên $MID = MDI \Rightarrow \Delta MID$ cân tại M $\Rightarrow$ MI = MD.

Dễ thấy $MAI = MIA \Rightarrow \Delta MAI$ cân tại M $\Rightarrow$ MI = MA

Do đó: MD = MA $\Rightarrow$ M là trung điểm của AD.

Ta chứng minh được: $MF = \frac{1}{2} AB; NF = \frac{1}{2} DC$

Mà AB + CD = 2MN

Nên 2.MF + 2.NF = 2.MN $\Rightarrow$ MF + NF = MN $\Rightarrow$ M, F, N thẳng hàng.

Từ đó ta dễ chứng minh: AB // CD nên ABCD là hình thang.

Bài 6: (3 điểm)

Một ôtô dự định đi từ thành phố A đến thành phố B với vận tốc không đổi là v km/h. Nếu vận tốc ôtô tăng thêm 20% thì nó sẽ đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Tuy nhiên sau khi đi dược 120 km với vận tốc v, ôtô đã tăng tốc thêm 25% và đến sớm hơn dự định 48 phút. Tính quãng đường giữa hai thành phố.

Đổi đơn vị: 48 phút = $\frac{48}{60}=\frac{4}{5}$ (giờ)

Gọi s (km) là quãng đường giữa hai thành phố A và B (s > 0)

Nếu vận tốc ôtô tăng thêm 20% thì nó sẽ đến B sớm hơn dự định 1 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{s}{v}-\frac{s}{v+20\%v}=1 \Leftrightarrow v=\frac{s}{6} \quad (1)$$

Sau khi đi dược 120 km với vận tốc v, ôtô đã tăng tốc thêm 25% và đến sớm hơn dự định 48 phút nên ta có phương trình: $\frac{120}{v}-\frac{s-120}{v+25\%v}=\frac{s}{v}-\frac{4}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} v=\frac{s}{6} \\ \frac{120}{v}-\frac{s-120}{v+25\%v}=\frac{s}{v}-\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=60 \\ s=360 \end{cases}$

Vậy quãng đường giữa hai thành phố A và B là 360 km.

❁ ❁ **HẾT** ❁ ❁