Trụ sở chính:766/36-766/38 CMT8, P.5, Q. TÂN BÌNH, 38 420 372 – 38 460 835

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 Quận 1 (2018-2019)

Bài 1: Cho biểu thức $H=\dfrac{a\sqrt{a}-a-4\sqrt{a}+4}{2-3\sqrt{a}+a\sqrt{a}}-\dfrac{a\sqrt{a}+a-4\sqrt{a}-4}{2+3\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ $\left(a\ge 0;\ a\ne 1;\ a\ne 4\right)$

Rút gọn **H** và tính **H** khi $a=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2}-1}$.

Bài 2:

a) Tìm số tự nhiên $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=4321$

b) Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x-10}\right)=7$

Bài 3:

a) Cho a, b, c là các số dương có tổng là hằng số. Tìm a, b, c sao cho: **ab + bc + ca** đạt giá trị lớn nhất.

b) Giả sử rằng, giá bán của viên kim cương (hột xoàn) tỉ lệ với bình phương khối lượng của nó; khi đem một viên kim cương cắt thành ba phần và vẫn bán với giá như trên (đúng tỉ lệ trên) thì tổng số tiền thu được tăng hay giảm và trong trường hợp chia cắt nào thì sự sai biệt (chênh lệch) về giá là lớn nhất?

Bài 4: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. M là điểm tùy ý trên nửa đường tròn này. Kẻ MH vuông góc với AB tại H. Gọi C và D lần lượt là hai hình chiếu của H lên cạnh MA và MB. Qua B dựng tiếp tuyến Bx với nửa đường tròn (O, R). Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với MB cắt tiếp tuyến Bx ở K.

a) Chứng minh: MK là tiếp tuyến của (O).

b) Chứng minh: đường thẳng AK đi qua trung điểm I của MH.

c) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AH và HB. Xác định vị trí của **M** để diện tích tứ giác **CDEF** đạt giá trị lớn nhất.

★ **HẾT** ★

THĂNG LONG

Trụ sở chính:766/36-766/38 CMT8, P.5, Q. TÂN BÌNH, 38 420 372 – 38 460 835

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 Quận 1 (2018-2019)

Bài 1: Cho biểu thức $H=\dfrac{a\sqrt{a}-a-4\sqrt{a}+4}{2-3\sqrt{a}+a\sqrt{a}}-\dfrac{a\sqrt{a}+a-4\sqrt{a}-4}{2+3\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ $\left(a\ge 0;\ a\ne 1;\ a\ne 4\right)$

Rút gọn **H** và tính **H** khi $a=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2}-1}$.

$$H=\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-2\right)}{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)^2}+\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-2\right)}{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}+1\right)^2}=\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}-1}+\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+1}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}+1\right)+\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}{a-1}=\frac{2a-4}{a-1}$$

Ta có: $a=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

Do đó $H=\dfrac{2\left(\sqrt{2}+1\right)-4}{\sqrt{2}+1-1}=2-\sqrt{2}$

Bài 2:

a) Tìm số tự nhiên $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=4321$

$\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=4321\Leftrightarrow 1111a+111b+11c+d=4321$

Mà $a,b,c,d\in N$, $1\le a\le 9$, $0\le b,c,d\le 9$

Do đó $4321-(111.9+11.9+9)\le 1111a\le 4321\Leftrightarrow 3214\le 1111a\le 4321\Rightarrow a=3$

Ta có được $111b+11c+d=988$, do đó $988-(11.9+9)\le 111b\le 988\Leftrightarrow 880\le 111b\le 988\Rightarrow b=8$

Ta có được $11c+d=100$, do đó $100-9\le 11c\le 100\Leftrightarrow 91\le 11c\le 100\Rightarrow c=9$

Ta có **d = 100 – 11.9 = 1.** Vậy số cần tìm là $\overline{abcd}=3891$

b) Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x-10}\right)=7$

ĐK: $x\ge 2$

$\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{(x+5)(x-2)}\right)=7$. Đặt $a=\sqrt{x+5};b=\sqrt{x-2}\Rightarrow a^2-b^2=7$, phương trình trở thành

$\left(a-b\right)\left(1+ab\right)=a^2-b^2$

$\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(1+ab-a-b\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(1-a\right)\left(1-b\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}=0\\ 1-\sqrt{x-2}=0\\ 1-\sqrt{x+5}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+5}=\sqrt{x-2}\,(vl)\\ x=3\ (nhận)\\ x=-4\ (loại)\end{array}\right.$$. Vậy $S=\{3\}$

Bài 3:
a) Cho a, b, c là các số dương có tổng là hằng số. Tìm a, b, c sao cho: **ab + bc + ca** đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0 \Leftrightarrow ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$

$\Leftrightarrow 3(ab+bc+ca)\le a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \Leftrightarrow 3(ab+bc+ca)\le (a+b+c)^2$

Do đó $E=ab+bc+ca\le \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$, không đổi (do a+b+c là hằng số)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$. Vậy khi **a = b = c** thì E đạt giá trị lớn nhất.

b) Giả sử rằng, giá bán của viên kim cương (hột xoàn) tỉ lệ với bình phương khối lượng của nó; khi đem một viên kim cương cắt thành ba phần và vẫn bán với giá như trên (đúng tỉ lệ trên) thì tổng số tiền thu được tăng hay giảm và trong trường hợp chia cắt nào thì sự sai biệt (chênh lệch) về giá là lớn nhất?

Giả sử viên kim cương có khối lượng là m, bị cắt thành ba phần có khối lượng lần lượt là a, b, c.
Suy ra: **m = a + b + c**
Gọi t là giá bán của m và x, y, z lần lượt là giá bán của a, b, c.

Theo đầu bài ta có $\dfrac{t}{m^2}=\dfrac{x}{a^2}=\dfrac{y}{b^2}=\dfrac{z}{c^2}$. Do đó $\dfrac{t}{m^2}=\dfrac{t-(x+y+z)}{m^2-(a^2+b^2+c^2)}=\dfrac{t-(x+y+z)}{2(ab+bc+ca)}$

Giá bị giảm $t-(x+y+z)=\dfrac{2t(ab+bc+ca)}{m^2}$

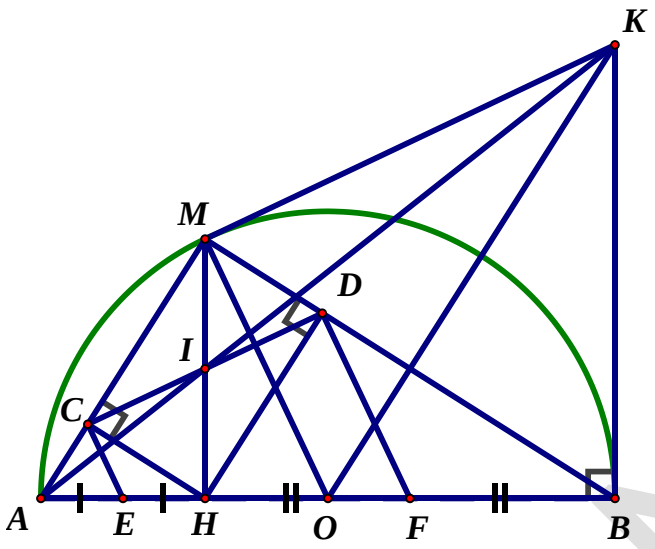
Theo câu a ta có: $ab+bc+ca\le \dfrac{(a+b+c)^2}{3}=\dfrac{m^2}{3}$. Do đó $t-(x+y+z)\le \dfrac{2}{3}t$ (t là giá ban đầu, không đổi)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Vậy tổng tiền thu được sẽ bị giảm đi $\dfrac{2}{3}t$ khi chia viên kim cương thành ba phần có khối lượng bằng nhau.

Bài 4: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. M là điểm tùy ý trên nửa đường tròn này. Kẻ MH vuông góc với AB tại H. Gọi C và D lần lượt là hai hình chiếu của H lên cạnh MA và MB. Qua B dựng tiếp tuyến Bx với nửa đường tròn (O, R). Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với MB cắt tiếp tuyến Bx ở K.

THĂNG LONG



a) Chứng minh: MK là tiếp tuyến của (O).

$OK \perp MB$ (gt) suy ra OK đi qua trung điểm của MB. Do đó OK là đường trung trực của MB $\Rightarrow$ KM = KB

Dễ thấy: $\Delta OMK = \Delta OBK\ (c-c-c) \Rightarrow OMK = OBK = 90^0 \Rightarrow MK \perp OM$ tai $M \in (O)$

Vậy MK là tiếp tuyến của (O).

b) Chứng minh: đường thẳng AK đi qua trung điểm I của MH.

M thuộc nửa đường tròn đường kính AB suy ra $AMB = 90^0 \Rightarrow AM \perp MB$ mà $OK \perp BM$ nên AM // OK

$\Rightarrow MAH = KOB$. Do đó $\Delta HMA \backsim \Delta BKO\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{MH}{BK} = \dfrac{AH}{OB} \Rightarrow \dfrac{MH}{2BK} = \dfrac{AH}{AB}$

Mặt khác $MH \perp AB, KB \perp AB \Rightarrow MH\ //\ KB$

ΔABK có $IH\ //\ KB \Rightarrow \dfrac{IH}{BK} = \dfrac{AH}{AB}$. Ta có: $\dfrac{MH}{2BK} = \dfrac{IH}{BK}\left(= \dfrac{AH}{AB}\right) \Rightarrow \dfrac{MH}{2} = IH$

Do đó I là trung điểm của MH.

c) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AH và HB. Xác định vị trí của **M** để diện tích tứ giác **CDEF** đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $CMD = HCM = HDM = 90^0 \Rightarrow$ MDHC là hình chữ nhật $\Rightarrow S_{HCD} = \dfrac{1}{2}S_{MDHC}$.

Mà $EH = \dfrac{1}{2}AH$ (E là trung điểm của AH) $\Rightarrow S_{CHE} = \dfrac{1}{2}S_{HAC}$. Tương tự $S_{DHB} = \dfrac{1}{2}S_{HBD}$

Mặt khác $MH \le MO = R$; $AB = 2R$

Do đó $S_{CDEF} = S_{HCD} + S_{CHE} + S_{DHB} = \dfrac{1}{2}\left(S_{MDHC} + S_{HAC} + S_{HBD}\right) = \dfrac{1}{2}S_{MAB}$

$= \dfrac{1}{4}MH.AB \le \dfrac{1}{4}.R.2R = \dfrac{1}{2}R^2 \Rightarrow S_{CDEF} \le \dfrac{1}{2}R^2$, không đổi.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow$ M là giao điểm của đường trung trực của AB với nửa đường tròn (O).

Vậy khi M là giao điểm của đường trung trực của AB với nửa đường tròn (O) thì diện tích CDEF lớn nhất.

★ **HẾT** ★