

ĐỀ KIỂM TRA
HỌC SINH GIỎI LỚP 9 - VÒNG 1
Quận TÂN BÌNH (2018-2019)

(NGÀY THI: Thứ bảy, 22- 09-2018)

Bài 1: (2 điểm) Cho $a + b = 10$; $a + c = 8$. Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac - bc}{a^2 - c^2 + 2ab + 2bc}$

Bài 2: (4 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $3x^2 - 10x + 137 = 18\sqrt{2x^2 + 31}$

b)
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 9(x + y) = 0 \\ x^2 - y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Bài 3: (2 điểm)

a) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 - y^3 = xy + 8$.

Bài 4: (4 điểm)

Theo Tổng cục điện lực Việt Nam, để khuyến khích tiết kiệm điện, giá điện sinh hoạt được tính theo lũy tiến, nghĩa là nếu người sử dụng càng nhiều điện thì giá mỗi kwh điện càng tăng lên.

Dưới đây là biểu giá điện:

Mức 1: từ 0 đến 50 kwh

Mức 2: 51 – 100 kwh, nhiều hơn 51 đồng so với mức 1

Mức 3: 101 – 200 kwh, nhiều hơn 258 đồng so với mức 2

Mức 4: 201 – 300 kwh, nhiều hơn 482 đồng so với mức 3

Mức 5: 301 – 400 kwh, nhiều hơn 275 đồng so với mức 4

Mức 6: 401 kwh trở lên, nhiều hơn 86 đồng so với mức 5.

Người dùng còn phải trả 10% thuế giá trị gia tăng (VAT)

a) Tháng 7/2018, nhà bạn Bình không sử dụng máy lạnh, sử dụng hết 200 kwh với giá 377575 đồng (có thuế VAT). Tháng 8/2018, nhà bạn Bình sử dụng máy lạnh phải trả tiền điện là 1160313 đồng (có thuế VAT). Tính giá tiền mỗi kwh ở mức 1 và nhà bạn Bình đã sử dụng bao nhiêu kwh điện trong tháng 8/2018.

b) Để mỗi tháng trả 600000 đồng tiền điện, thì nhà bạn Bình chỉ mở bao nhiêu giờ sử dụng máy lạnh? Biết 1 giờ sử dụng máy lạnh tốn 2kwh.



Trụ sở chính: 766/36-766/38 CMT8, P.5, Q. TÂN BÌNH, 38 420 372 – 38 460 835

Bài 5: (2 điểm) Để chống hạn hán, ông Ba đã đầu tư ba máy bơm I, II, III. Khi cả ba máy bơm đều hoạt động thì thời gian của ba máy sẽ nhanh hơn máy I bơm một mình là 7 giờ, nhanh hơn máy II bơm một mình là 10 giờ và bằng $\frac{1}{4}$ máy III bơm một mình. Hỏi nếu máy I và máy III cùng bơm thì bao lâu mới hoàn thành công việc đó.

Bài 6: (2 điểm) Lúc 6 giờ, An đi xe đạp từ nhà đến trường. Nhưng do xe hư, An phải gọi bố đến đón và chờ đến trường đúng 6 giờ 30 như ngày thường. Biết thời gian An đợi bố là 5 phút và vận tốc xe máy gấp 3 lần vận tốc xe đạp. Hỏi An bị hư xe lúc mấy giờ?

Bài 7: (2 điểm) Cho (O) và đường kính AB cố định. Lấy M đi động trên (O) sao cho điểm M không trùng A và B. Lấy điểm K đối xứng với O qua điểm A. Vẽ đường thẳng vuông góc với AB tại K cắt MA tại D. BM và DK cắt nhau tại E.

- Chứng minh tích $AM \cdot AD$ không đổi
- Tìm vị trí của điểm M để diện tích BDE nhỏ nhất.

Bài 8: (2 điểm) Cho $\triangle ABC$ có đường cao AH. Bên ngoài tam giác, vẽ tia $Ax \perp AB$ và $Ay \perp AC$. Lấy lần lượt điểm $D \in Ax$, $E \in Ay$ sao cho $AD = AB$ và $AE = AC$. Gọi M là trung điểm DE.

Chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$ và M, A, H thẳng hàng.

★ HẾT ★

**HƯỚNG DẪN ĐỀ KIỂM TRA
HỌC SINH GIỎI LỚP 9 - VÒNG 1
Quận TÂN BÌNH (2018-2019)**

Bài 1: (2 điểm) Cho $a + b = 10$; $a + c = 8$. Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac - bc}{a^2 - c^2 + 2ab + 2bc}$

Ta có: $a + b = 10$; $a + c = 8 \Rightarrow b - c = 2$.

$$\begin{aligned} M &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac - bc}{a^2 - c^2 + 2ab + 2bc} = \frac{a(a+b) + b(b-c) + c(a+c)}{(a-c)(a+c) + 2b(a+c)} \\ &= \frac{a(a+b) + b(b-c) + c(a+c)}{(a+c)(a+b+b-c)} = \frac{10a + 2b + 8c}{8 \cdot (10+2)} = \frac{5a + b + 4c}{48} \\ &= \frac{(a+b) + 4(a+c)}{48} = \frac{10 + 4 \cdot (8)}{48} = \frac{42}{48} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

Bài 2: (4 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $3x^2 - 10x + 137 = 18\sqrt{2x^2 + 31}$

$$\text{pt} \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 137 - 2 \cdot (9)\sqrt{2x^2 + 31} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 10x + 25) + (2x^2 + 31) - 2 \cdot (9)\sqrt{2x^2 + 31} + (9)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 + (\sqrt{2x^2 + 31} - 9)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ \sqrt{2x^2 + 31} - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

Vậy $S = \{5\}$.

b)
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 9(x+y) = 0 \\ x^2 - y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 9(x+y) = 0 \\ x^2 - y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 9(x+y) \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x^2 - y^2)(x+y) \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 3(x-y)(x+y)^2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

Trụ sở chính: 766/36-766/38 CMT8, P.5, Q. TÂN BÌNH, 38 420 372 – 38 460 835

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)[3(x^2+2xy+y^2)-x^2-xy-y^2]=0 \\ x^2-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(2x^2+5xy+2y^2)=0 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(2x+y)(x+2y)=0 \\ x^2-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-y=0 \\ x^2-y^2=3 \end{cases} \text{ (I)} \\ \begin{cases} 2x+y=0 \\ x^2-y^2=3 \end{cases} \text{ (II)} \\ \begin{cases} x+2y=0 \\ x^2-y^2=3 \end{cases} \text{ (III)} \end{cases}$$

Giải hệ (I) $\begin{cases} x-y=0 \\ x^2-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y^2-y^2=3 \text{ (vô lí)} \end{cases}$

Giải hệ (II) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x^2-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ x^2-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ x^2-(-2x)^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ x^2=-1 \text{ (vô lí)} \end{cases}$

Giải hệ (III) $\begin{cases} x+2y=0 \\ x^2-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y \\ (-2y)^2-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y \\ \begin{cases} y=1 \\ y=-1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

Bài 3: a) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \geq \frac{2a}{a+b+c} \\ \sqrt{\frac{b}{c+a}} = \frac{b}{\sqrt{b(c+a)}} \geq \frac{2b}{a+b+c} \\ \sqrt{\frac{c}{a+b}} = \frac{c}{\sqrt{c(a+b)}} \geq \frac{2c}{a+b+c} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

Dấu “=” xảy ra khi $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+c \\ b=c+a \\ c=a+b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0$ (mâu thuẫn với giả thiết)

Do đó dấu “=” không xảy ra. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 - y^3 = xy + 8$.

Cách 1: Phương pháp phân tích

$$x^3 - y^3 = xy + 8 \Leftrightarrow (x - y)^3 + 3xy(x - y) - xy = 8$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^3 + xy(3x - 3y - 1) = 8 \Leftrightarrow (3x - 3y)^3 + 27xy(3x - 3y - 1) = 216$$

$$\Leftrightarrow (3x - 3y)^3 - 1 + 27xy(3x - 3y - 1) = 215$$

$$\Leftrightarrow (3x - 3y - 1) \left[(3x - 3y)^2 + (3x - 3y) + 1 \right] + 27xy(3x - 3y - 1) = 215$$

$$\Leftrightarrow (3x - 3y - 1)(9x^2 - 18xy + 9y^2 + 3x - 3y + 1 + 27xy) = 215$$

$$\Leftrightarrow (3x - 3y - 1)(9x^2 + 9xy + 9y^2 + 3x - 3y + 1) = 215$$

Vì x, y nguyên; $3x - 3y - 1 \leq 9x^2 + 9xy + 9y^2 + 3x - 3y + 1$

và $215 = 1.215 = (-1)(-215) = 5.43 = (-5).(-43)$ nên ta có các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} 3x - 3y - 1 = 1 \\ 9x^2 + 9xy + 9y^2 + 3x - 3y + 1 = 215 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3x - 1 \\ 9x^2 + 3x(3x - 1) + (3x - 1)^2 + 3x - (3x - 1) + 1 = 215 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3x - 1 \\ 9x^2 + 9x^2 - 3x + 9x^2 - 6x + 1 + 3x - 3x + 1 + 1 = 215 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3x - 1 \\ 27x^2 - 9x = 212 \end{cases} \text{ (không có nghiệm nguyên)}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 3x - 3y - 1 = -215 \\ 9x^2 + 9xy + 9y^2 + 3x - 3y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3x + 214 \\ 9x^2 + 3x(3x + 214) + (3x + 214)^2 + 3x - (3x + 214) + 1 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3x + 214 \\ 9x^2 + 9x^2 + 642x + 9x^2 + 1284x + 45796 + 3x - 3x - 214 + 1 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3x + 214 \\ 27x^2 + 1926x + 45584 = 0 \end{cases} \text{ (không có nghiệm nguyên)}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 3x - 3y - 1 = 5 \\ 9x^2 + 9xy + 9y^2 + 3x - 3y + 1 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3x - 6 \\ 9x^2 + 3x(3x - 6) + (3x - 6)^2 + 3x - (3x - 6) + 1 = 43 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3x - 6 \\ 9x^2 + 9x^2 - 18x + 9x^2 - 36x + 36 + 3x - 3x + 6 + 1 = 43 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3x - 6 \\ 27x^2 - 54x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3x - 6 \\ x(x - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 3x - 3y - 1 = -43 \\ 9x^2 + 9xy + 9y^2 + 3x - 3y + 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3x + 42 \\ 9x^2 + 3x(3x + 42) + (3x + 42)^2 + 3x - (3x + 42) + 1 = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3x + 42 \\ 9x^2 + 9x^2 + 126x + 9x^2 + 252x + 1764 + 3x - 3x - 42 + 1 = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3x + 42 \\ 27x^2 + 378x + 1728 = 0 \end{cases} \text{ (không có nghiệm nguyên)}$$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x; y) = (0; -2), (2; 0)$

Cách 2: Phương pháp rút 1 ẩn theo ẩn kia, rồi tính Δ

$$x^3 - y^3 = xy + 8$$

Đặt $x = y + a$ (với $a \in \mathbf{Z}$), phương trình thành:

$$(y + a)^3 - y^3 = (y + a)y + 8$$

$$\Leftrightarrow (y + a - y)^3 + 3y(y + a)(y + a - y) = (y + a)y + 8$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 3ay(y + a) - (y + a)y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 3ay^2 + 3a^2y - y^2 - ay - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3a - 1)y^2 + a(3a - 1)y + a^3 - 8 = 0 (*)$$

$$\Delta = a^2(3a - 1)^2 - 4(3a - 1)(a^3 - 8)$$

$$= (3a - 1)[a^2(3a - 1) - 4(a^3 - 8)]$$

$$= (3a - 1)(3a^3 - 3a^2 - 4a^3 + 32)$$

$$= (3a - 1)(-a^3 - 3a^2 + 32)$$

$$= (3a - 1)[-a^2(a + 1) + 32]$$

Để phương trình (*) có nghiệm y thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (3a - 1)[-a^2(a + 1) + 32] \geq 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 1 \geq 0 \\ -a^2(a + 1) + 32 \geq 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 3a - 1 \leq 0 \\ -a^2(a + 1) + 32 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{1}{3} \\ -a^2(a + 1) + 32 \geq 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a \leq \frac{1}{3} \\ a^2(a + 1) \geq 32 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Mà $a \in \mathbf{Z}$ nên $a = 1; 2$

Với $a = 1$ phương trình (*) thành: $2y^2 - 2y - 7 = 0$; $\Delta = 4 - 4(2)(-7) = 60$ (loại)

Với $a = 2$ phương trình (*) thành: $5y^2 + 10y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = y + a = 2 \\ y = -2 \Rightarrow x = y + a = 0 \end{cases}$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x; y) = (0; -2), (2; 0)$

Bài 4: (4 điểm)

a) Gọi x (đồng) là giá tiền mỗi kwh ở mức 1 ($x > 0$)

Giá tiền mỗi kwh ở mức 2 là $x + 51$ (đồng)

Giá tiền mỗi kwh ở mức 3 là $x + 51 + 258 = x + 309$ (đồng)

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$[50x + 50.(x + 51) + 100.(x + 309)].(1 + 10\%) = 377575 \Leftrightarrow x = 1549 \text{ (đồng).}$$

Trụ sở chính: 766/36-766/38 CMT8, P.5, Q. TÂN BÌNH, 38 420 372 – 38 460 835

Giá tiền mỗi kwh ở mức 1 là 1549 (đồng)
 Giá tiền mỗi kwh ở mức 2 là $1549 + 51 = 1600$ (đồng)
 Giá tiền mỗi kwh ở mức 3 là $1600 + 258 = 1858$ (đồng)
 Giá tiền mỗi kwh ở mức 4 là $1858 + 482 = 2340$ (đồng)
 Giá tiền mỗi kwh ở mức 5 là $2340 + 275 = 2615$ (đồng)
 Giá tiền mỗi kwh ở mức 6 là $2615 + 86 = 2701$ (đồng)

Nếu nhà bạn Bình sử dụng hết 400 kwh thì số tiền phải trả là:

$$\left[50 \cdot (1549) + 50 \cdot (1600) + 100 \cdot (1858) + 100 \cdot (2340) + 100 \cdot (2615) \right] \cdot (1 + 10\%) = 922625 \text{ (đồng)}$$

Do $922625 < 1160313$, nên số kwh nhà bạn Bình phải ở mức 6.

Gọi y (kwh) là số kwh nhà bạn Bình sử dụng trong mức 6, ở tháng 8.

Ta có phương trình: $922625 + 2701 \cdot y \cdot (1 + 10\%) = 1160313 \Leftrightarrow y = 80$ (kwh)

Do đó, trong tháng 8, nhà bạn Bình đã sử dụng: $400 + 80 = 480$ (kwh).

b) Nếu nhà bạn Bình sử dụng hết 300 kwh thì số tiền phải trả là:

$$\left[50 \cdot (1549) + 50 \cdot (1600) + 100 \cdot (1858) + 100 \cdot (2340) \right] \cdot (1 + 10\%) = 634975 \text{ (đồng)}$$

Nếu chỉ sử dụng 200 kwh thì số tiền phải trả là: **377575** đồng

Do $377575 < 600000 < 634975$ nên số kwh nhà bạn Bình phải ở mức 4.

Số tiền nhà bạn Bình phải trả khi sử dụng máy lạnh là: $600000 - 377575 = 222425$ (đồng)

Gọi z (kwh) là số kwh sử dụng máy lạnh.

Ta có phương trình: $2340z \cdot (1 + 10\%) = 222425 \Leftrightarrow z \approx 86$ (kwh)

Vậy số giờ sử dụng máy lạnh khoảng: $86 : 2 = 43$ (giờ)

Bài 5: (2 điểm) Để chống hạn hán, ông Ba đã đầu tư ba máy bơm I, II, III. Khi cả ba máy bơm đều hoạt động thì thời gian của ba máy sẽ nhanh hơn máy I bơm một mình là 7 giờ, nhanh hơn máy II bơm một mình là 10 giờ và bằng $\frac{1}{4}$ máy III bơm một mình. Hỏi nếu máy I và máy III cùng bơm thì bao lâu mới hoàn thành công việc đó.

Gọi x (giờ) là thời gian máy I bơm một mình hoàn thành công việc ($x > 0$)

y (giờ) là thời gian máy II bơm một mình hoàn thành công việc ($y > 0$)

z (giờ) là thời gian máy III bơm một mình hoàn thành công việc ($z > 0$)

Trong một giờ máy I, II, III lần lượt bơm được là: $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{y}$ và $\frac{1}{z}$ (công việc)

Trong một giờ cả 3 máy bơm được là: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ (công việc)

Thời gian cả 3 máy hoàn thành công việc là: $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$ (giờ)

Trong một giờ, máy I và máy III bơm được là: $\frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ (công việc)

Thời gian máy I và máy III hoàn thành công việc là: $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{z}}$ (giờ)

$$\text{Theo đề bài ta có hệ phương trình: } \begin{cases} x - \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 7 & (1) \\ y - \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 10 & (2) \\ \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{1}{4}z & (3) \end{cases}$$

$$\text{Từ (3)} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{z} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{z} \quad (4)$$

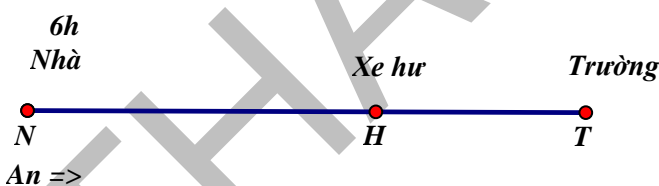
$$\text{Thay (3) vào (1) và (2) ta được: } \begin{cases} x - \frac{z}{4} = 7 \\ y - \frac{z}{4} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + \frac{z}{4} \\ y = 10 + \frac{z}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{28+z}{4} \\ y = \frac{40+z}{4} \end{cases}$$

$$\text{Thay vào (4) ta được: } \frac{4}{28+z} + \frac{4}{40+z} = \frac{3}{z} \Rightarrow \dots \Rightarrow z = 20 \text{ (nhận)}$$

$$\text{Do đó } x = \frac{28+20}{4} = 12 \text{ (giờ) (nhận)}$$

$$\text{Vậy thời gian máy I và máy III hoàn thành công việc là: } \frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{20}} = 7,5 \text{ (giờ).}$$

Bài 6: (2 điểm) Lúc 6h, An đi xe đạp từ nhà đến trường. Nhưng do xe hư, An phải gọi bố đến đón và chờ đến trường đúng 6h30 như ngày thường. Biết thời gian An đợi bố là 5 phút và vận tốc xe máy gấp 3 lần vận tốc xe đạp. Hỏi An bị hư xe lúc mấy giờ?



Gọi x (phút) là thời gian bạn An đi từ nhà đến chỗ xe bị hư ($0 < x < 25$)

Thời gian bạn An đi học hàng ngày là $6\text{h}30 - 6\text{h} = 30$ phút

Nếu xe không bị hư thì An đi từ chỗ xe bị hư đến trường là $30 - x$ (phút)

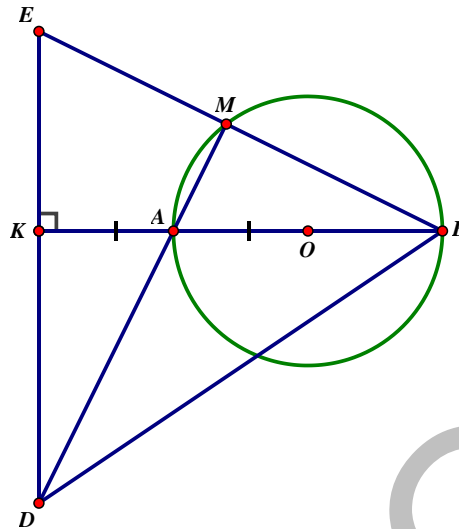
Thời gian bố của An chờ từ chỗ xe bị hư đến trường là $30 - (x + 5) = 25 - x$ (phút)

Vì vận tốc xe máy gấp 3 lần vận tốc xe đạp nên ta có phương trình:

$$30 - x = 3(25 - x) \Leftrightarrow x = 22,5 \text{ (phút) (nhận)}$$

Vậy An bị hư xe lúc $6\text{h} + 22,5 \text{ phút} = 6 \text{ giờ } 22 \text{ phút } 30 \text{ giây}$.

Bài 7: Cho (O) và đường kính AB cố định. Lấy M đi động trên (O) sao cho điểm M không trùng A và B. Lấy điểm K đối xứng với O qua điểm A. Vẽ đường thẳng vuông góc với AB tại K cắt MA tại D. BM và DK cắt nhau tại E.



a) Chứng minh tích $AM \cdot AD$ không đổi

$$\Delta AKD \sim \Delta AMB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AK}{AM} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AM \cdot AD = AK \cdot AB = 2R^2 \text{ (không đổi)}$$

b) Tìm vị trí của điểm M để diện tích BDE nhỏ nhất.

$$\text{Để chứng minh } \Delta KDA \sim \Delta KBE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{KD}{KB} = \frac{KA}{KE} \Rightarrow KD \cdot KE = KA \cdot KB = 3R^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô- si ta có: $KE + KD \geq 2\sqrt{KE \cdot KD}$

$$\Rightarrow DE \geq 2 \cdot \sqrt{3R^2} = 2\sqrt{3}R$$

$$\text{Mà } S_{BDE} = \frac{1}{2} BK \cdot DE \text{ nên } S_{BDE} \geq \frac{1}{2} (3R) \cdot 2\sqrt{3}R = 3\sqrt{3}R^2 \text{ (đvdt)}$$

Dấu “=” xảy ra khi $KE = KD \Rightarrow K$ là trung điểm của DE

$\Rightarrow BK$ là đường trung tuyến của ΔBDE .

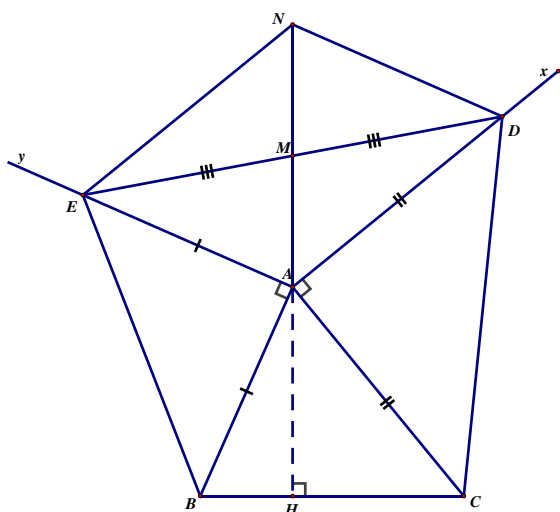
Mà $AK = \frac{1}{3}BK$ (để chứng minh) nên A là trọng tâm của ΔBDE .

Mà DA cắt BE tại M nên DM là đường trung tuyến của ΔBDE .

Từ đó ta dễ chứng minh ΔBDE đều, ... $\angle ABM = 30^\circ \Rightarrow AM = \frac{R}{2}$.

Bài 8: Cho ΔABC có đường cao AH . Bên ngoài tam giác, vẽ tia $Ax \perp AB$ và $Ay \perp AC$. Lấy lần lượt điểm $D \in Ax$, $E \in Ay$ sao cho $AD = AB$ và $AE = AC$. Gọi M là trung điểm DE .

Chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$ và M, A, H thẳng hàng.



Trên tia đối của tia MA lấy điểm N sao cho M là trung điểm của AN.
Do đó tứ giác AEND là hình bình hành $\Rightarrow EN = AD = AC$.

Ta dễ chứng minh $\angle EAN = \angle BAC$ (cùng bù với $\angle EAD$).

Do đó, ta dễ chứng minh: $\triangle EAN = \triangle ABC$ (c-g-c) $\Rightarrow AN = BC$ mà $AM = \frac{1}{2}AN$ nên $AM = \frac{1}{2}BC$.

Ta có: $\triangle EAN = \triangle ABC \Rightarrow \angle EAN = \angle ABC$ mà $\angle ABC + \angle BAH = 90^\circ$ nên $\angle EAN + \angle BAH = 90^\circ$

Mặt khác: $\angle EAB = 90^\circ$ nên $\angle EAN + \angle EAB + \angle BAH = 180^\circ \Rightarrow N, A, H$ thẳng hàng $\Rightarrow M, A, H$ thẳng hàng.

★ HẾT ★