

ĐỀ THI VÀO ĐỘI TUYỂN TOÁN LỚP 8

TRƯỜNG TÂN BÌNH - QUẬN TÂN BÌNH (2013-2014)

(Thi ngày: thứ 7 ngày 22/3/2014)

Thời gian: 120 Phút

Bài 1: (4 điểm)

- a) Cho $a+b=1$. Tính giá trị của biểu thức $C = 2(a^3 + b^3) - 3(a^2 + b^2)$
- b) Phân tích đa thức $x^4 + 3x^2 + 4$ thành nhân tử.
- c) Cho phân thức: $A = \frac{3x^2 - 6x + 6}{1-x}$. Tìm giá trị của $x \in \mathbb{Z}$ để phân thức A có giá trị nguyên.
- d) Chứng minh với mọi giá trị x, y thuộc \mathbb{Z} thì giá trị của $A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$ là số chính phương.

Bài 2: (2,5 điểm) Giải các phương trình sau:

- a) $(x-1)^3 + (x-2013)^3 = (2x-2014)^3$
- b) $\frac{(2012-x)^2 + (2012-x)(x-2013) + (x-2013)^2}{(2012-x)^2 - (2012-x)(x-2013) + (x-2013)^2} = \frac{19}{49}$
- c) $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$

Bài 3: (3,5 điểm) Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Tia phân giác của $\angle BAC$ cắt BC tại D . Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BC không chứa A vẽ tia Bx sao cho $\angle xBC = \angle CAD$. Tia Bx cắt AD tại E .

- a) So sánh $\angle BEA; \angle BCA$
- b) Chứng minh: $AB \cdot AC = AD \cdot AE$
- c) Chứng minh: $AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$
- d) Gọi M là điểm bất kỳ trên đoạn AB (M khác A, B). Qua M vẽ đường thẳng song song với BC , đường thẳng này cắt AC tại N . Gọi K là trung điểm của BC , AK cắt MN tại I . Gọi O là giao điểm của AK và BN . Chứng minh ba điểm M, O, C thẳng hàng.



HẾT

Hướng dẫn giải:

Bài 1: (4 điểm)

a) Cho $a+b=1$. Tính giá trị của biểu thức $C=2(a^3+b^3)-3(a^2+b^2)$

$$C=2(a+b)(a^2-ab+b^2)-3a^2-3b^2=2a^2-2ab+2b^2-3a^2-3b^2=-(a^2+2ab+b^2)=-(a+b)^2=-1$$

b) Phân tích đa thức x^4+3x^2+4 thành nhân tử.

Ta có: $x^4+3x^2+4=x^4+4x^2+4-x^2=(x^2+2)^2-x^2=(x^2+2-x)(x^2+2+x)$

c) Cho phân thức: $A=\frac{3x^2-6x+6}{1-x}$. Tìm giá trị của $x \in \mathbb{Z}$ để phân thức A có giá trị nguyên.

Điều kiện: $x \neq 1$

Ta có: $A=\frac{3x^2-6x+6}{1-x}=\frac{3(x^2-2x+1)+3}{1-x}=\frac{3(1-x)^2+3}{1-x}=3(1-x)+\frac{3}{1-x}$

Để A nguyên với $x \in \mathbb{Z}$ thì: $\frac{3}{1-x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3:(1-x) \Rightarrow (1-x) \in U(3) \Rightarrow (1-x) \in \{-3; -1; 1; 3\}$

$\Rightarrow x \in \{4; 2; 0; -2\}$. Vậy ...

d) Chứng minh với mọi giá trị x, y thuộc \mathbb{Z} thì giá trị của

$A=(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$ là số chính phương.

$A=(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4=(x+y)(x+4y)(x+2y)(x+3y)+y^4$

$= (x^2+5xy+4y^2)(x^2+5xy+6y^2)$. Đặt: $a=x^2+5xy+5y^2$. Khi đó biểu thức thành:

$A=(a-y^2)(a+y^2)+y^4=a^2-y^4+y^4=a^2=(x^2+5xy+5y^2)^2$

Vậy A là số chính phương với mọi x, y thuộc \mathbb{Z} .

Bài 2: (2,5 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $(x-1)^3+(x-2013)^3=(2x-2014)^3$

Chứng minh bổ đề: với $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3=3abc$

Ta có: $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c$

Ta có: $a^3+b^3+c^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3=-c^3+3abc+c^3=3abc$ (đpcm)

Ta có:

$(x-1)^3+(x-2013)^3=(2x-2014)^3 \Leftrightarrow (x-1)^3+(x-2013)^3-(2x-2014)^3=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^3+(x-2013)^3+(2014-2x)^3=0$

Do $(x-1)+(x-2013)+(2014-2x)=0$. Nên áp dụng bổ đề trên, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 3(x-1)(x-2013)(2014-2x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2013 \\ x=1007 \end{cases}$$

Vậy $S=\{1; 2013; 1007\}$

b) $\frac{(2012-x)^2+(2012-x)(x-2013)+(x-2013)^2}{(2012-x)^2-(2012-x)(x-2013)+(x-2013)^2}=\frac{19}{49}$

Đặt: $a=2012-x; b=x-2013$. Khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} = \frac{19}{49} \text{ (điều kiện: } a^2 - ab + b^2 \neq 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow 49a^2 + 49ab + 49b^2 = 19a^2 - 19ab + 19b^2$$

$$\Leftrightarrow 30a^2 + 68ab + 30b^2 = 0 \Leftrightarrow (5a + 3b)(3a + 5b) = 0$$

$$\text{TH1: } 5a + 3b = 0 \Leftrightarrow 5(2012 - x) + 3(x - 2013) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4021}{2}$$

$$\text{TH2: } 3a + 5b = 0 \Leftrightarrow 3(2012 - x) + 5(x - 2013) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4029}{2}$$

Vậy ...

$$\text{c) } \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$$

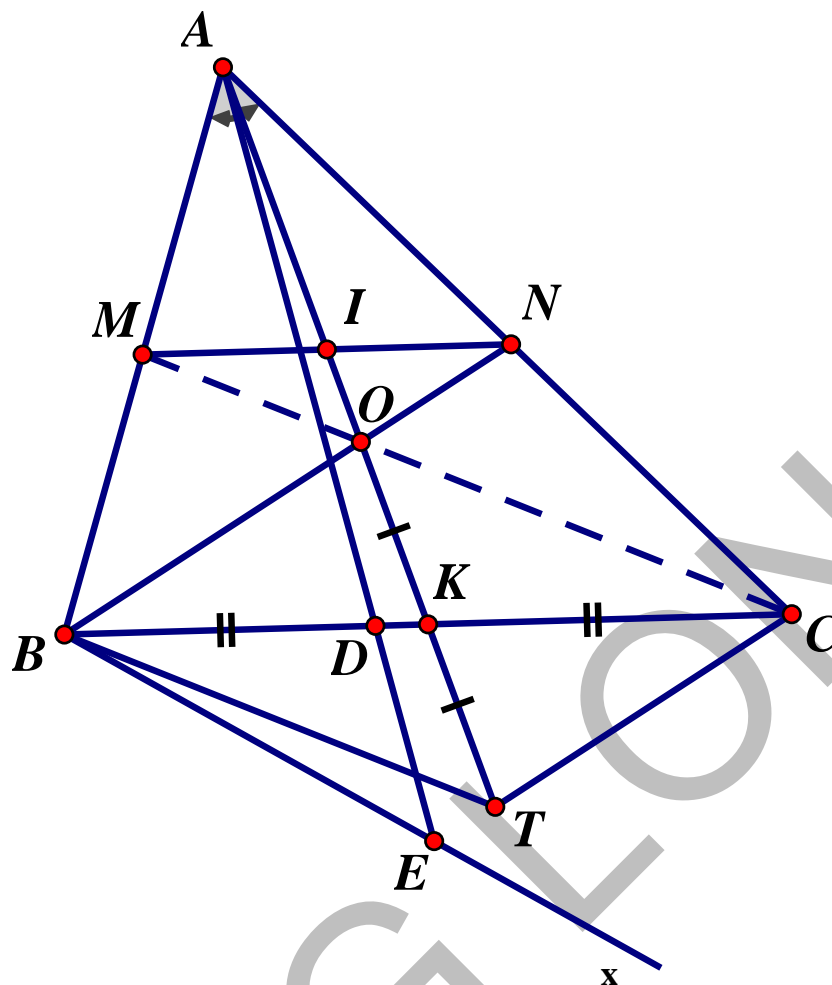
$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18} \text{ (điều kiện: } x \neq -4; -5; -6; -7 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \Leftrightarrow \frac{x+7-x-4}{(x+7)(x+4)} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow x^2 + 11x + 28 = 54 \Leftrightarrow x^2 + 11x - 26 = 0 \Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -13; x = 2 \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy } S = \{-13; 2\}$$

Bài 3: (3,5 điểm) Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Tia phân giác của $\angle BAC$ cắt BC tại D . Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BC không chứa A vẽ tia Bx sao cho $\angle xBC = \angle CAD$. Tia Bx cắt AD tại E .



a) So sánh $\angle BEA; \angle BCA$

Xét $\triangle BDE$ và $\triangle ADC$, Ta có :

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle EBD = \angle CAD (\text{gt}) \\ \angle BDE = \angle ADC (\text{đđ}) \end{cases} \Rightarrow \triangle BDE \sim \triangle ADC (\text{g-g}) \Rightarrow \angle BEA = \angle BCA$$

b) Chứng minh: $AB.AC = AD.AE$

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADC$, ta có:

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle CAD (\dots) \\ \angle BEA = \angle DCA (\text{vì } \angle BEA = \angle BCA) \end{cases} \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ADC (\text{g-g})$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} (\text{tsđđ}) \Rightarrow AB.AC = AD.AE \quad (1)$$

c) Chứng minh: $AD^2 = AB.AC - DB.DC$

$$\text{Ta có: } \triangle ADC \sim \triangle BDE (\text{cma}) \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{DC}{DE} \Rightarrow AD.DE = DB.DC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) trừ vế theo vế ta được đpcm.

d) Gọi M là điểm bất kỳ trên đoạn AB (M khác A, B). Qua M vẽ đường thẳng song song với BC, đường thẳng này cắt AC tại N. Gọi K là trung điểm của BC, AK cắt MN tại I. Gọi O là giao điểm của AK và BN. Chứng minh ba điểm M, O, C thẳng hàng.

Trên tia đối của tia KA lấy điểm T sao cho K là trung điểm của OT.

Chứng minh được: tứ giác BOCT là hình bình hành. $\Rightarrow OC \parallel BT; BO \parallel CT$

Ta có:

$$\begin{cases} ON \parallel CT \\ MN \parallel BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AN}{AC} = \frac{AO}{AT} \text{ (đ/lý Thales thuận)} \\ \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} \text{ (đ/lý Thales thuận)} \end{cases} \Rightarrow \frac{AO}{AT} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow OM \parallel BT \text{ (đ/lý Thales đảo)}$$

Mà $OC \parallel BT$ (cmt). Nên OM trùng với OC. Vậy M, O, C thẳng hàng.



HẾT